Matematik Paradoksları

David Pierce

4 Aralık 2014
Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

1 Giriş

- A, "B cümlesi doğrudur" cümlesi olsun
- B, "A cümlesi yanlıştır" cümlesi olsun.

O zaman A yanlış olmalı, çünkü doğru ise, o zaman B doğrudur, ama B'ye göre A yanlıştır.

Bununla beraber, benzer şekilde, A doğru olmalı, çünkü yanlış ise, o zaman B yanlıştır, ama B'ye göre A yanlıştır, ve bu durumda A doğrudur.

Böylece bir *paradoks* çıkar.

2 Paradoks sözcüğü

Paradoks. 1 Kökleşmiş inançlara aykırı olan düşünce, aykırı kanı. **2** Kimi zaman şaşırtma amacı güden, aykırı duygu ve düşünce. *Eşanlamlı (anlamdaş)*: **karşıtlam** [6].

Ortodoks. 1 Kilisenin katı öğretisine uygun olan. **2** Ortodoksluğu benimsemiş olan (Hristiyan).

Δόξα, ης, ἡ. Düşünce, inanç, kanı, yargı, hüküm; öğreti, doktrin; temelsiz düşünce; varsayım, hipotez, faraziye; ün, şöhret.

Ὀρθός, ή, όν. Ayakta, dik duran, dik; doğru, gerçek; yasaya, kanuna uygun; yasal, kanuni, meşru.

Ὀρθός, Öklid'in "doğru" için kullandığı sözcüktür.

Παρά (*adv.* ve *praep.*), **(*gen.* ile)** yanına, yakınına, yakınında; **(*dat.* ile)** yanına, yakınına; **(*acc.* ile)** -e doğru, – boyunca, -in yakınında.

Παράδοξος, ος, ον. Beklenenin aksine, olağanüstü, olağandışı, alışılmamış, garip, tuhaf, acayip [1].

Παραγραφή, ῆς, ἡ, yana yazılan şey.

Örneğin ¶ *paragraf* işareti!

Παράλληλος, ος, ον, paralel, koşut.

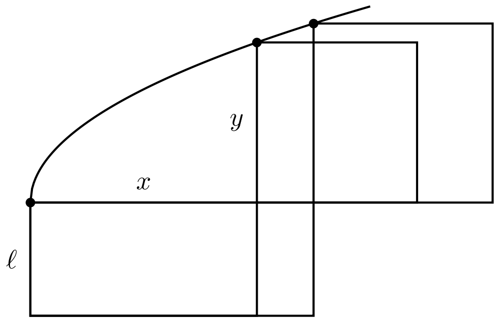
Öklid'in 44. önermesi:

> Verilmiş bir doğru boyunca
> verilmiş bir üçgene eşit
> bir paralelkenar *uygulamak* (παραβαλεῖν)
> verilmiş bir düzkenar açıda.

Παραβάλλω. Atmak; emanet etmek, bırakmak; . . . ; yaklaşmak . . .

Παραβολή, ῆς, ἡ, karşılaştırma . . .

Neden **parabol,** kesin bir eğridir? Bir $y^2 = \ell x$ denklemine göre y'deki kare, taban olarak ℓ'ye bir dikdörtgen uygulanırsa, yüksekliği x'dir.



3 Yalancı paradoksu örneği

Tekrar **paradoks,** kökleşmiş inançlara aykırı olan düşüncedir.

Kökleşmiş inanç: Her cümle ya doğru ya yanlıştır.

Karşıt örnekler: • "Gidelim." • "Buyurun." • "Ne güzel!" • "Saat kaç?"

Anlamına göre bir cümle **(1)** bildirme, **(2)** istek, **(3)** buyurma, **(4)** koşul, **(5)** ünlem, veya **(6)** soru cümlesi olabilir [2].

Düzeltilmiş inanç: Her bildirme veya koşul cümlesi, ya doğru ya yanlıştır.

Karşıt örnekler:

- "Bu cümle yanlıştır."
- Yukarıdaki A ve B cümleleri.

Paradoks 1. *Bazi bildirme cümleleri ne doğru ne yanlıştır.*

4 Yüklem paradoksu

Bir bildirme cümlesi, **özne** ve **yüklem** öğelerinden oluşur. Örneğin

özne	yüklem
İnce'nin o bankadaki parası	bir milyondan fazladır.
İnce'nin	o bankada parası var.
İnce'nin o bankadaki parası	var. [5, XVI, 6]

Bir cümlenin öznesi, bir öbek olabilir, mesela

"O bankada parası var" dört sözcükten oluşur.

Aşağıdaki C cümlesi doğrudur, ama kanıtlanamaz.

"Kendi öznesi olduğu zaman kanıtlanamaz"
kendi öznesi olduğu zaman kanıtlanamaz.

Zira C'ye göre bir cümle kanıtlanamaz. O halde C yanlış ise, o cümle kanıtlanabilir. Hangi cümle kanıtlanabilir? Kendisi! Yani

- Yüklemi "kendi öznesi olduğu zamanda kanıtlanamaz" olan,
- öznesi "kendi öznesi olduğu zamanda kanıtlanamaz" ifadesi olan

cümle; ama bu cümle, yanlış olarak varsaydığımız C cümlesidir.
C kanıtlanabildiğinden, C doğru olmalıdır. Kısaca C yanlış ise doğrudur.

Böylece C doğrudur. O zaman C cümlesine göre bir cümle kanıtlanamaz. Aslında doğruluğunu gösterdiğimiz C cümlesi kanıtlanamaz.

Paradoks 2. *Doğru ama kanıtlanamaz cümle vardır.*

C cümlesinin doğruluğunu kanıtlamadık mı? Kanıtladık, ama yeni kanıt kavramı ile kanıtladık.

Russell & Whitehead 1908–13 yazdığı *Principia Mathematica* kitabından bir PM "kanıt dizgesi" veya "biçimsel dizge" çıkar.

Teorem 1 (Gödel'in Eksiklik Teoremi, 1930 [3])**.** PM *dizgesinde*

"Kendi öznesi olduğu zaman PM*'de kanıtlanamaz"*
kendi öznesi olduğu zaman PM*'de kanıtlanamaz*

cümlesi oluşturulabilir, ve bu cümle doğrudur, ama PM*'de kanıtlanamaz.* PM*'nin yerine başka biçimsel dizgeler konulabilir.*

Russell & Whitehead, *Principia Mathematica* kitabını başka bir paradoksu çözmek için yazmışlardı.

5 Kuaför paradoksu

Bazı kişiler kendi saçlarını keser, bazı kişiler kendi saçlarını kesmez.

Paradoks 3. *Bir köyde, kendi saçlarını kesmeyen (ve yalnız kendi saçlarını kesmeyen) köylülerin saçlarını kesen bir kuaför olamaz.*

6 Katalog paradoksu

Her katalog, bir kitap olarak sayılsın. Bazı kataloglar, kitap katalogudur [4]. Bir katalog, kendisini içerebilir, kendisini içermeyebilir.

Paradoks 4. *Bütün kendisini içermeyen kataloglar, bir katalog oluşturamaz.*

7 Russell Paradoksu (Bertrand Russell, 1872–1970)

Bertrand Russell, aşağıdaki paradoksu 1902'de Gottlob Frege'ye gönderdi [7]. Zatan önceki yılda Ernst Zermelo benzer paradoksu bulmuştu [9, n. 9].

"Kendi yüklem olamaz" bir yüklem olabilir mi?

"Üç sözcüklüdür" kendi yüklem olamaz

cümlesi doğrudur, çünkü

"Üç sözcüklüdür" üç sözcüklüdür

cümlesi yanlıştır. Böylece "kendi yüklem olamaz" öbeği, bir yüklem olarak kullanılabilir. Ama gerçek bir yüklem ise,

"Kendi yüklem olamaz" kendi yüklem olamaz

cümlesi oluşturulabilir, ve bu cümle ne doğru ne yanlıştır.

Paradoks 5. *"Kendi yüklem olamaz" bir yüklem olamaz.*

Farklı şekilde, matematik nesneler **küme** olarak, ve ayrıca öğeleri küme olan küme olarak, düşünülebilir. Örneğin

$$0 = \varnothing, \qquad 1 = \{0\}, \qquad 2 = \{0, 1\}, \qquad 3 = \{0, 1, 2\}, \qquad \dots$$

Her x bir *küme* olsun. Eğer φ bir yüklem ise, o zaman

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

topluluğu oluşturulabilir. Mesela

$$\{x\colon x \notin x\}$$

topluluğu oluşturulabilir. Ama bu topluluk, bir küme olamaz, çünkü bir a kümesiyse, o zaman

$$a \in a \iff a \notin a.$$

Paradoks 6. *Öğeleri küme olan bazı topluluklar, küme değildir.*

Bir $\{x\colon \varphi(x)\}$ topluluğuna **sınıf** denir. Her a kümesi $\{x\colon x \in a\}$ sınıftır, ama gösterdiğimiz gibi küme olmayan sınıf vardır.

Teorem 2. *Bir B iki konumlu bağıntısı için, öyle bir a olamaz ki her x için*

$$x \mathrel{B} a \iff \neg(x \mathrel{B} x).$$

Kanıt. $x = a$ olsun. □

Örneğin $x \mathrel{B} y$ aşağıdaki gibi olabilir:

- x'in saçları y tarafından kesilir,
- x, y tarafından içerilir,
- "x" y cümlesi doğrudur,
- $x \in y$.

8 Cantor paradoksu (Georg Cantor, 1845–1918)

$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ olsun.

Teorem 3. *ω'nın her n elemanı için $n < 2^n$.*

Kanıt. Tümevarımı kullanacağız.

1. $0 < 1 = 2^0$.
2. $m \in \omega$ ve $m < 2^m$ varsayılsın. O zaman $1 \leqslant 2^m$, dolayısıyla

$$m + 1 < 2^m + 2^m = 2^m \cdot 2 = 2^{m+1}.$$ □

Alternatif kanıt. Eğer $|A| = n$ ise, o zaman $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$. Ancak

$$|A| < |\mathscr{P}(A)|. \tag{$*$}$$

Zira $|A| \leqslant |\mathscr{P}(A)|$, çünkü $b \in A$ ise $\{b\} \in \mathscr{P}(A)$. A kümesinin her b elemanı için, A kümesinin farklı $F(b)$ alt kümesi olsun. (Böylece F, A kümesinden $\mathscr{P}(A)$ kümesine giden birebir bir fonksiyondur.)

$$C = \{x \in A \colon x \notin F(x)\}$$

olsun. O zaman A kümesinin her b elemanı için

$$b \in C \iff b \notin F(b).$$

O halde

$$C \neq F(b).$$

(Yukarıdaki teoremde $x\ B\ y$, $x \in F(y)$ olsun.) □

Paradoks 7. $|A| < |\mathscr{P}(A)|$ *eşitsizliği, sonsuz kümeler için bile doğrudur. Böylece en büyük küme yoktur.*

9 Tarski'nin Teoremi (Alfred Tarski, 1901–83)

Öklid'in 6. önermesinin ΕΑΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ . . . bildirmesi,[1] aşağıdaki biçimlerde yazılabilir.

Her x için,
bu x, tabandaki açılarının birbirine eşit olduğu üçgen ise,
kenarları da birbirine eşittir.

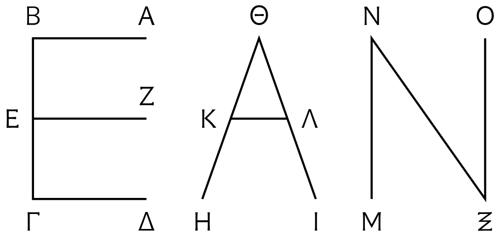
Bu ifade $\forall x\ \varphi(x)$ olarak yazılabilir. Buradaki $\varphi(x)$ ifadesi, bir **formüldür.** $\forall x\ \varphi(x)$ ifadesi de bir formüldür; ayrıca bir **cümledir.** Eğer ABC düzlemde bir üçgen ise, o zaman $\varphi(ABC)$ ifadesi de bir cümledir.

[1] Yani Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Her $\varphi(x)$ formülünün *yazılı* biçimi

$$\ulcorner\varphi(x)\urcorner$$

olsun. O zaman $\ulcorner\varphi(x)\urcorner$, bir figürdür! Mesela $\ulcorner\mathsf{EAN}\ldots\urcorner$ aşağıdaki biçimdedir.



O halde her $\varphi(x)$ formülü için bir $\varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$ cümlesi çıkar. Her $\theta(x)$ formülü için $\theta^*(x)$, öyle bir formül olsun ki her $\varphi(x)$ formülü için

$$\theta^*(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) \iff \theta(\ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)\urcorner).$$

Şimdi, mümkünse $\theta(x)$, öyle bir formül olsun ki her σ cümlesi için

$$\theta(\ulcorner\sigma\urcorner) \iff \sigma.$$

O halde σ'nın doğruluğu, $\ulcorner\sigma\urcorner$ figürünün geometrik özelliğidir. Ama olamaz, çünkü her $\varphi(x)$ formülü için

$$\begin{aligned} \theta^*(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) &\iff \varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner), \\ \neg\theta^*(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) &\iff \neg\varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner), \end{aligned}$$

dolayısıyla

$\neg\theta^*(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$ doğrudur ancak ve ancak $\varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)$ yanlıştır.

Öyleyse $\neg\theta^*(x)$ formülü

kendi öznesi olduğu zaman yanlıştır

(veya “kendi yüklem olamaz”) yüklemi anlamına gelir. Gördüğümüz gibi öyle bir yüklem olamaz, çünkü bu yüklemin öznesi $\ulcorner\theta^*(x)\urcorner$ ifadesi ise, bir çelişki çıkar.

Paradoks 8. *Doğruluk, cümlelerin geometrik bir özelliği değildir.*

10 Gödel'in Eksiklik Teoremi (Kurt Gödel, 1906–78)

Gödel'in gösterdiğine göre *kanıtlanabilme,* bir cümlenin geometrik özelliğidir.[2] Zira bir *biçimsel kanıt,* sadece bir cümle listesi ki her cümle, önce gelen cümlelerden kesin kurallara göre çıkar.

Böylece öyle bir $\psi(x,y)$ formülü vardır ki her σ cümlesi için

$$\sigma \text{ kanıtlanabilir ancak ve ancak } \exists y\ \psi(\ulcorner\sigma\urcorner, y).$$

Şimdi $\theta(x)$, $\neg\exists y\ \psi(x,y)$ formülü olsun. O zaman her σ cümlesi için

$$\theta(\ulcorner\sigma\urcorner) \text{ doğrudur ancak ve ancak } \sigma \text{ kanıtlanamaz.}$$

Öyleyse her $\varphi(x)$ formülü için

$$\theta^*(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) \text{ doğrudur ancak ve ancak } \varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) \text{ kanıtlanamaz.}$$

Öyleyse $\theta^*(x)$ formülü

kendi öznesi olduğu zaman kanıtlanamaz

yüklemi anlamına gelir. Gördüğümüz gibi bu yüklemin öznesi $\ulcorner\theta^*(x)\urcorner$ ifadesi ise, doğru ama kanıtlanamayan cümle çıkar.

Paradoks 9. *Doğru ama kanıtlanamaz cümle vardır.*

---

[2] Aslında Gödel, kanıtlanabilmenin *sayısal* özellik olduğunu gösterdi.

Kaynaklar

[1] Güler Çelgin. *Eski Yunanca–Türkçe Sözlük*. Kabalcı, İstanbul, 2011.

[2] Tufan Demir. *Türkçe Dilbilgisi*. Kurmay, Ankara, 2004.

[3] Kurt Gödel. On formally undecidable propositions of *principia mathematica* and related systems I. In van Heijenoort [8], pages 596–616. First published 1931.

[4] İletişim Yayınları. *Genel Katalog*. İletişim Yayınları, İstanbul, 2014.

[5] Geoffrey Lewis. *Turkish Grammar*. Oxford University Press, second edition, 2000. First edition 1967.

[6] Ali Püsküllüoğlu. *Arkadaş Türkçe Sözlüğu*. Arkadaş, Ankara, 2004.

[7] Bertrand Russell. Letter to Frege. In van Heijenoort [8], pages 124–5. First published 1902.

[8] Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

[9] Ernst Zermelo. A new proof of the possibility of a well-ordering. In van Heijenoort [8], pages 183–98. First published 1908.