

Ioannis Keppleri
HARMONICES
MUNDI

LIBRI V. QVORVM

- Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro II. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

ACCESSIT NVNC PROPTER COGNATIONEM MATERIA eiusdem Authoris liber ante 23. annos editus Tubingæ, cui titulus Prodomus, seu Mysterium Cosmographicum, de causis Cælorum Numeri, Proportionis motuumque Periodicorum, ex quinque Corporibus Regularibus.



Cum S. C. M^{ta}. Priuilegio ad annos XV.

Lincii Austriae,

Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

XXVII. PROPOSITIO.

Congruunt etiam ad solidandas figuras, semiregulares figurae, scilicet Rhombi plani, perfectissimè, idque tantum bis.

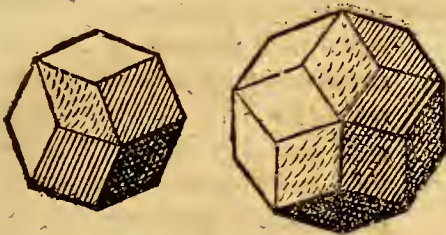
Nam ex duodecim planis Rhombis, certæ proportionis Diagoniorum, fit Rhombus solidus, figura cellulae Apiarie, quantum ad latera sex, & fundum triangularem solidum: sex enim Rhombi congruentes sic, ut obtusi obtusis, acuti acutis applicentur; tres habent obtusangulos hiatus, tria etiam paria acutorum extantia supra, totidemque infra. Congruunt igitur trium utriusque Rhomborum, obtusis conjuntorum ternæ eminentiæ, in hiatus, recipiuntque suis hiatibus illorum eminentias.

Sic triginta Rhombi plani, proportionis Diagonorum alterius, faciunt Rhombum solidum Tricontaëdricum. Quini enim & quini Rhombi, angulis acutis conjuncti, ad efficiendos duos solidos ex oppositis plagis stantes, cum hient apud obtusos conjunctos; quatuor & quatuor Rhomborum obtusis alijs, implent hiatus: denique in utriusque veluti testæ medio, Zona ex decem

Vu & hiæ figuram minor.

De hac etiam supra fol. 49. in Def. V.

Xx. & hiæ figura major.



Rhombicis composita circumit, conjungens utramque testam.

Non esse verò plures perfectas Rhomborum congruentias, sic probatur. Sunt enim duo anguli plani Rhombici acuti, duo obtusi; quorum semper acutis unus & unus obtusus faciunt duos rectos: nec plures tribus obtusis congruunt, ne superent quatuor rectos. Quod si ergo tres solum acutos conjunxeris, fit ut in Cubo; Hexahedron Rhombicum, cum duobus solum solidis acutis, longissime distantibus; ceteri solidi in medio corporis non tantum distant: non servantur igitur leges definitionis VIII, quæ non admittit duos solos angulos in eadem sphaera. Præterea ex sex solidis obtusis quilibet clauditur à duobus obtusis planis & uno acuto; quæ irregularitas rursus est contra definitiones. Ergo non tres tantum plani acuti coire debent. At neque sex acuti, totidem scilicet Rhomborum, coeunt. Si enim singuli habent quantitatem è tertias unius Recti, obtusi habebant duplam quantitatem, scilicet 4 tertias: & sic tam tres obtusi, quam sex acuti formabunt 4 Rectos, nec vel illi vel hi formabunt angulum solidum, sed sternerent continuam planitiem, ut in figura G. Sin autem acuti minores sumantur; obtusi majores erunt, & tres superabunt quatuor rectos. Ergo duæ tantum sunt perfectissima Rhombica congruentia: una, in qua quatuor acuti anguli Rhombici coeant in solidum; altera, in qua quinque: quibus tamen associatur Cubus, tanquam Rhomborum omnium principium, quia planum ipsius est laterum aequalium quatuor, ut Rhombicorum.

XXVIII. PROPOSITIO

Perfectæ in solido congruentiæ gradus inferioris, species sunt tredecim; ex quibus tredecim oriuntur Archimedæa Corpora.

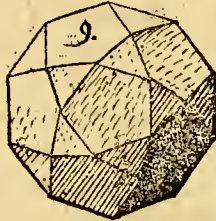
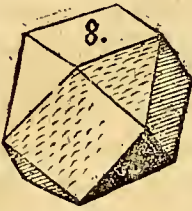
XII. Archimedæa

Cum enim misceantur in hoc gradu figura diversa, quare per propos. XXI. miscebuntur aut duarum aut trium specierum figura. Quod si duarum, tunc inter eas vel sunt Trigoni vel non sunt.

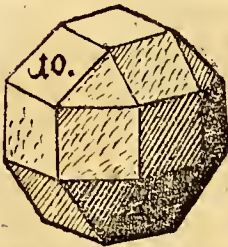
Igr ex Trigoni & Tetragonis fiunt solida tria, quibus quidem def. IX. competat. Nam illa rejicit formas hasce tres, in quibus solidum angulum claudunt, cum uno Tetragonico plano angulo, tam duo, quam tres plani Trigonicis; aut cum duobus Tetragonis, unus Trigonicus; quia in primo casu unus solus Tetragonus est, fit q. dimidium Octaedri, & anguli solidi sunt diversi formes; in secundo duo soli Tetragoni, in tertio duo soli Trigoni: qua p. X, sunt imperfecta congruentia. Restant ergo modi hi, in quibus angulum solidum claudunt 4 plani. Primum, quatuor Trigonicis & unus Tetragonis. Sunt enim minores 4 rectis. Congruunt igitur sex Tetragoni & Triginta duo (id est 20 & 12.) Trigoni, & fit figura Triacontaëdrica, quod appello Cubum simum. Hic in schemate sequenti pictus est Numero 12.

I. Cubus
simus.

Quinq. enim Trigonicis plani & unus Tetragonis superant quatuor rectos, cum debeant ad solidum claudendum esse minores quatuor rectis; per XVI. Sic etiam quatuor Trigonicis & duo Tetragonis. Tres vero Trigonicis & duo Tetragonis faciunt quatuor rectos.



II. Rh. Cubi
ëctaedron



Secundo duo Trigonicis & duo Tetragonis minus habent quatuor rectis; Hic igitur congruunt octo Trigoni & sex Tetragoni ad formandum unum Tessareskædron, quod cuboëctædron appello. Pictum est hic num. octavo. Duo vero Trigonicis cum tribus Tetragonis superant 4 rectos.

Tertio unus Trigonicus & tres Tetragonis minus habent 4 rectis. Hic ergo congruunt octo Triangula & octodecim (id est 12 & 6) quadrangula, ad unum Icosihexædron, quod appello sectum Rhombu Cuboëctædricum: vel Rhombicuboctædron. Pictus est hic numero 10.

In his igr tribus sunt Tetragoni juxta Trigonos: sequitur ut & Pentagonicos y s. seorsim associemus.

Quinq. plani Trigonicis juxta unum Pentagonicum non stant, quia neq. juxta minorem eo, Tetragonicum, stare poterant. Quatuor ergo Trigonicis, cum uno Pentagonico, minus efficiunt 4 rectis, & congruunt octoginta (id est 20. & 60) Trigoni, cum duodecim Pentagonis, ad formandum Ennecontakædron; quod appello Dodecædron simum. Pingitur hic numero 13. Et in hoc ordine simorum, Icosædron potest esse tertium, quod est quasi Tetraëdron simum.

IV. Dodecæ
dron simū

Tres

Tres planos Trigonicos si uni Pentagonico associaveris, fit quod supra, ut duo solum Pentagoni veniant in solidum; & si duos Trigonicos uni pentagonico, venit unus solus Pentagonus in solidum: fit q̄ illic Zona vel columna media, hic Pyramis, partes Icosædri: nec anguli solidi sunt hic ejusdem speciei, quia unus ambitur; ut in Icosædro, quinque Trigonici. Et transactum est cum unico Pentagonico.

Pp.

At tres Trigonici cum duobus Pentagonicis plus efficiunt 4 rectis. Transactum igitur est cum tribus Trigonici in societatem Pentagonicorum adsciscendis.

V. Icosidodecahedron.

Duo Trigonici cum duobus Pentagonicis minus efficiunt 4 Rectis. Congruunt igitur viginti Trigoni & duodecim Pentagoni in unum Triacontakædyhedron, quod appello Icosidodecahedron. Pingitur hic Numero 9. Cum uno Pentagonico duos Trigonicos jam rejecimus, Transactum igr est cum duobus Trigonis.

Unus Trigonici cum tribus Pentagonicis plus quam 4 rectos efficit, cum duobus verò per XXIII. nihil regulare, quia Pentagonus est figura impariliteras. Sicq̄, transactam est cum Pentagonis in societate Trigonorum.

Trigonici quatuor cum uno Hexagonico, & duo cum duobus Hexagonicis implēt planities; at tres cum duobus sunt majores 4 rectis, cum uno Hexagonico duos solos Hexagonos in figuram recipiunt; rejectis igr tribus Trigonici, duo sunt æquales uni Hexagonico, quare rejecti per XXII. Restat ut unus Trigonici cum duobus Hexagonicis copuletur. Itaq̄, congruunt quatuor Trigoni cum quatuor Hexagonis in unum Octaëdron, quod appello Truncum Tetraëdron. Pingitur Numero 2 fol. sequenti.

VI Tetraëdron truncum.

Trigonici quatuor cum uno Heptagonico & majoribus, superant 4 rectos; nulla igitur porro mentio faciendâ est quatuor Trigonorum: nulla etiam trium, ob causas sepe allegatas: duo verò cum figurarum Hexagono majorum binis planis, superant 4 rectos: nulla igitur neq̄ duorum porro est faciendâ mentio; cum binis planis figurâ majoris; nec duorum cum uno plano figurâ majoris, quia illi superantur ab hoc, quod rejectum est ax. XXII. Restat examinandus hic casus, cum unus Trigonici duobus planis figurâ majoris Hexagonâ copuletur: at qui cum duobus Heptagonicis rejicitur per XXIII. ut & cum omnium impariliterarum duobus: cum duobus verò Octogonicis, fit corpus, in quo congruunt octo Trigoni & sex Octogoni in unum Tesarakædecædron, quod appello Cubum Truncum. Ejus figuram habes signatam Num. 1. fol. seq. Cum duobus Decagonicis, fit corpus, in quo congruunt viginti Trigoni & 12 Decagoni, in unum Triacontakædyhedron, quod Appello Truncum Dodecaëdron. Id signatum est inter figurâs sequentes Num. 3. Cum duobus Dodecagonicis impletur planities, nec fit solidus angulus, multoq̄, minus cum majoribus. Et transactum est in univrsam cum Trigonis: in dualitate quidem specierum.

VII Cul us truncus.

VIII. Dodecaëdron truncum.

Cum ergo inter binas planorum species non amplius sunt Trigoni: minima porro figura erit Tetragonus. Atqui Tetragonici tres, cum uno majoris plani angulo, superant 4 rectos: duo verò Tetragonici cum uno majoris, non tolerantur, ob definitionem IX, quia majoris speciei figurâ tantum dua recipentur in solidum. Unus igr Tetragonici cum duobus Pentagonicis rejicitur per XXIII: cum duobus Hexagonicis coit, & congruunt sex Tetragoni cum octo Hexagonis in unum Tesarakædecædron, quod Appello Truncum Octaëdron, Pingitur numero 5. sequentis schematis. Unus Tetragonici cum duobus Heptagonicis alijs.

IX. Octaëdron truncum.

64 DE FIGURARUM HARMON:

que imparilaterarum rejicitur, per XXIII, cum duobus Octogonicis, planum locum implet: cum majoribus etiam superat 4 rectos; nec a surgit ad solidum angulum formandum. Ita transactum est cum Tetragono, cum dua sola debent esse planorum species.

Duo Pentagonici cum uno Hexagonico aut quocunq; alio unico rejectitium quid inchoant, per XXIII, quod supra etiam de Trigonico & Tetragonico cum binis Pentagonicis usurpavimus. Insuper cum uno Decagonico planitiem sterunt, nec cum illo aut majoribus a surgunt in soliditatem.

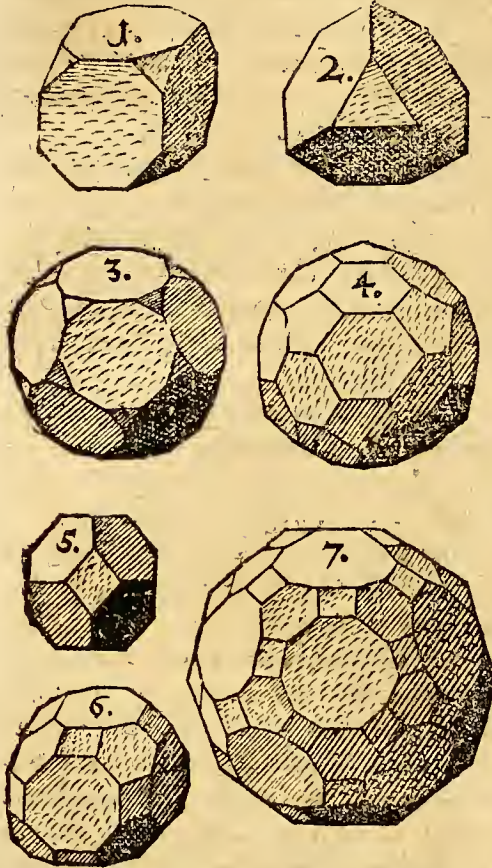
K. Truncum Icosidodecaedron.

Unus ergo Pentagonicus cum duobus Hexagonicis minus facit 4 rectis; & congruunt duodecim Pentagoni cum viginti Hexagonis in unam Triacontak-

dyhedron, quod appello Truncum Icosidhedron. Formam habes signatam numero 4. Nec plura expectanda à Pentagono. Nam unus Pentagonus cum duobus Heptagonicis jam superat 4. rectos.

Hexagonicus cum duobus alijs implet planitiem, cum majoribus superat 4 rectos. Itaq; hic finis est mixtorum ex duabus speciebus.

Quod si trium specierum Plana concurrere possunt ad unum angulum solidum: Primum anguli duo plani, unus Tetragoni, alter Pentagoni superant 2 rectos majores his, multo magis: tres verò Trigonomum trium, aquant 2 rectos: nequeunt igr tres Trigonici admitti, ne summa omnium superet 4 rectos. Duo verò Trigonici cum uno Tetragonico & uno Pentagonico vel pro eo Hexagonico, aut quocunq; majori, rejiciuntur, per pr. XXIII. quia Trigonus imparilatera figura cingi deberet Tetragono & Pentagono, vel pro eo Hexagono &c.



K. Rhombicosidodecaedron.

Unus igitur Trigonicus cum duobus Tetragonis & uno Pentagonico, minus efficiunt 4 rectis, & congruunt 20 Trigoni cum 30 Tetragonis & 12 Pentagonis, in unum Hexacontakdyhedron, quod appello Rhombicosidodecaedron, seu sectum Rhombum Icosidodecaedricum. Pingitur num. 11. fol. antecedentis

Unus Trigonicus, duo Tetragonici, cum uno Hexagonico, aquant rectos quatuor; cum uno majori, superant; nec ad solidum a surgunt. Mittamus igitur duos Tetragonicos.

Unus Trigonicus, unus Tetragonicus, & duo Pentagonici superant 4 rectos; multoq; magis si bini majores plani anguli admiscerentur. Desinit igitur misceri anguli plani quaterni ad formandum unum solidum; desinit ergo & Trigonus ingredi mixturam triplicem. Nam unus Trigonicus, unus Tetragon-

eus &

cus & unus pentagonicus, aut quicumq; alius hujus loco, rejiciuntur per XXIV, quia trigonus est imparilatera figura.

Cum igitur porro sint tres solum anguli plani: nulla inter figuras toleratur imparilatera, per eandem XXIX.

Tetragonicus igitur, cum Hexagonico & Octogonico minimis, minus faciunt 4 rectis; & congruunt 12 Tetragoni, 8 Hexagoni, & 6 Octogoni, in unum Icosihexaëdron, quod appello truncum Cuboctaëdron: non quod truncatione nasci possit; sed quia simile est truncato Cuboctaëdro. Pingitur num. 6.

XII. Cuboctaëdron truncum.

Tetragonicus cum Hexagonico & Decagonico, minus 4 rectis efficiunt: & congruunt 30 Tetragoni, 20 Hexagoni & 12 Decagoni, in unum Hexacontadyhedron, quod appello truncum Icosidodecaëdron, simili de causa ut proximum. Pingitur num. 7.

XIII. Icosidodecaëdron truncum.

Si pro Decagonico succedat in societatem Dodecagonicus; implentur 4 recti, nec fit solidum; sic etiam si pro Hexagonico succedat Octogonicus, & aliquis, Octogonico major, sit tertius; superantur 4 recti: nec minus, si absit Tetragonicus, & socientur tres distinctarum figurarum parilaterarum majores. Igitur stat omnis Archimedeorum familia intra num. 13. quod erat demonstrandum.

XXIX. CONSECTARIUM.

Figuræ congruæ sunt in universum duodecim, octo Radicales seu Primæ, & quatuor auctæ seu Stellæ.

- | | |
|----------------|--------------------------|
| 1. Trigonus | 7. Dodecagonus |
| 2. Tetragonus. | 8. Icosigonus |
| 3. Pentagonus | 9. Stella Pentagonica |
| 4. Hexagonus | 10. Stella Octogonica |
| 5. Octogonus | 11. Stella Decagonica |
| 6. Decagonus | 12. Stella Dodecagonica. |

Gradus congruentiæ distincti sunt. In primo sunt Trigonus & Tetragonus, quia congruunt tam in solido, quam in plano, tam singularium specierum inter se, quam junctarum, & cum alijs.

Secundo gradu consistunt Pentagonus cum stella sua. Nam congruunt & singularium specierum inter se, in solido; & tradunt mutuas operas in plano: sed potior est Pentagonus, quia congruit etiam cum alijs nonnullis tam in plano, quam in solido.

Tertius est Hexagoni, quia figuræ hujus speciei congruunt in plano, cum alijs verò tam in solido quam in plano.

Quartum gradum tenent Octogonus & Decagonus cum stellis suis. Nam Radicales illæ, cum alijs nonnullis congruunt in solido, stellæ verò cum figuris singularium specierum quadamtenus: in plano verò omnes quatuor congruunt cum alijs, magis tamen variè magisq; perfectè Octogonica secta.

Quintus gradus habet Dodecagonum cum stella sua; quia in solido quidem minime; at in plano multifariam congruunt cum alijs; in solido igitur sola magnitudine impediuntur. Causa planitiei præferenda est hæc secta gradus quarto.

Ultimus gradus est Icosigoni, quia is non nisi in plano; nec nisi cum alijs, & cum illis ipsis quoq; imperfectè congruit.

Quod