Sayılar Kuramı Örnekleri

David Pierce

24 Haziran 2024

Burada "Sayılar Kuramı Özeti" 10 Haziran 2024 taslağındaki Örnekler 1 ve 10 ve Alıştırmalar 8 ve 10 gibi örnekler vardır. Her zamanki gibi, hata yapmamaya çalışıyorum, ama yazının matematiğinde veya Türkçesinde bir hata bulursanız lütfen bana haber verin.

Örnek 12.

$$19^2 = 361 < 370 < 400 = 20^2$$

olduğunda

$$\begin{aligned}
\sqrt{370} &= 19 + \sqrt{370} - 19, \\
\frac{1}{\sqrt{370} - 19} &= \frac{\sqrt{370} + 19}{9} = 4 + \frac{\sqrt{370} - 17}{9}, \\
\frac{9}{\sqrt{370} - 17} &= \frac{\sqrt{370} + 17}{9} = 4 + \frac{\sqrt{370} - 19}{9}, \\
\frac{9}{\sqrt{370} - 19} &= \sqrt{370} + 19.
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$[19, 4, 4] = \left[19, 4 + \frac{1}{4}\right] = \left[19, \frac{17}{4}\right] = 19 + \frac{4}{17} = \frac{327}{17}.$$

O zaman

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) &= (327, 17),\\ (a_{m+1}, b_{m+1}) &= (a_1 a_m + d b_1 b_m, b_1 a_m + a_1 b_m)\\ &= (327 a_m + 6290 b_m, 17 a_m + 327 b_m)\end{aligned}$$

olduğunda her m için

$$a_m{}^2 - 370 b_m{}^2 = (-1)^m$$

çünkü

$$\begin{aligned}327^2 = (320+7)^2 = 102400 + 4480 + 49 &= 106929,\\ 370 \cdot 17^2 = 370 \cdot 289 &= 106930,\end{aligned}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned}&(a_1 x + d b_1 y)^2 - d(b_1 x + a_1 y)^2\\ &\qquad = (a_1{}^2 - d b_1{}^2) x^2 + 0xy + d(d b_1{}^2 - a_1{}^2) y^2 = -x^2 + d y^2,\end{aligned}$$

dolayısıyla tümevarım sayesinde genel iddia doğrudur.

Örnek 13. Tabloda asal olan 241 modülüsüne göre 7'nin kuvvetleri vardır.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	7	49	102	−9	−63	41	46	81	85	113	68
12	−6	−42	−53	111	54	−104	−5	−35	−4	−28	45	74
24	36	11	77	57	−83	−99	30	−31	24	−73	−29	38
36	25	−66	20	−101	16	112	61	−55	97	−44	−67	13
48	91	−86	121	−117	−96	51	116	89	−100	23	−80	−78
60	−64	34	−3	−21	94	−65	27	−52	118	103	−2	−14
72	−98	37	18	−115	−82	−92	79	71	15	105	12	84
84	106	19	−108	−33	10	70	8	56	−90	93	−72	−22
96	87	−114	−75	−43	−60	62	−48	−95	58	−76	−50	−109
108	−40	−39	−32	17	119	110	47	88	−107	−26	59	−69

O zaman $x \equiv 7^t \pmod{241}$ olduğunda

$$\begin{aligned}
&x^{70} \equiv -15 \pmod{241} \\
&\iff 7^{70t} \equiv 7^{200} \pmod{241} \\
&\iff 70t \equiv 200 \pmod{240} \\
&\iff 7t \equiv 20 \pmod{24} \\
&\iff t \equiv 7 \cdot 20 \equiv 20 \pmod{24} \\
&\iff t \equiv 20, 44, 68, 92, 116, 140, 164, 188, 212, 236 \pmod{240} \\
&\iff x \equiv -4, 97, 118, -90, -107, 4, -97, -118, 90, 107 \pmod{241} \\
&\iff x \equiv 237, 97, 118, 151, 134, 4, 144, 123, 90, 107 \pmod{241}.
\end{aligned}$$

Örnek 14. Modülüs 29 olduğunda, $xx' \equiv 1$ olduğunda, aşağıdaki tabloyu hesaplayabiliriz:

x	± 2	± 3	± 4	± 5	± 8	± 9	± 12
x'	∓ 14	± 10	∓ 7	± 6	± 11	± 13	∓ 12

O zaman

$$\begin{aligned} 28! \equiv\ & (2 \cdot 15)(3 \cdot 10)(4 \cdot 22)(5 \cdot 6)(7 \cdot 25)(8 \cdot 11)(9 \cdot 13) \\ & \cdot (12 \cdot 17)(14 \cdot 27)(16 \cdot 20)(18 \cdot 21)(19 \cdot 26)(23 \cdot 24) \cdot 28 \equiv -1. \end{aligned}$$

Böylece Wilson Teoremi bu durumda doğrudur. Şimdi 7 için Euler Kriterini kontrol edelim.

x	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 8	14
$7x'$	± 7	∓ 11	∓ 12	± 9	± 13	± 6	∓ 10	-14

Yukarıdaki tablodan

$$6^2 \equiv 7,$$

dolayısıyla

$$\left(\frac{7}{29}\right) = 1,$$

ve aynı zamanda

$$\begin{aligned} -1 &\equiv 28! \equiv 7 \cdot (2 \cdot 18)(3 \cdot 17)(4 \cdot 9)(5 \cdot 13) \cdot 6 \cdot (8 \cdot 19) \\ &\quad \cdot (10 \cdot 21)(11 \cdot 27)(12 \cdot 26)(14 \cdot 15)(16 \cdot 24)(20 \cdot 25)(22 \cdot 28) \cdot 23 \\ &\equiv 7^{13} \cdot 6 \cdot 23 \equiv -7^{14}, \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$7^{14} \equiv \left(\frac{7}{29}\right),$$

yani Euler Kriteri bu durumda doğrudur.