Sayılar Kuramı (MAT 316)

Bütünleme sınavı

David Pierce

19 Temmuz 2024

Matematik Böl., MSGSÜ

Problem 1. Sayma sayılarında

$$x^2 - 77y^2 = 1$$

için sonsuz bir çözüm kümesi bulun.

Çözüm. $\sqrt{77} = 8 + \sqrt{77} - 8$ ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{77}-8} &= \frac{\sqrt{77}+8}{13} = 1 + \frac{\sqrt{77}-5}{13},\\
\frac{13}{\sqrt{77}-5} &= \frac{\sqrt{77}+5}{4} = 3 + \frac{\sqrt{77}-7}{4},\\
\frac{4}{\sqrt{77}-7} &= \frac{\sqrt{77}+7}{7} = 2 + \frac{\sqrt{77}-7}{7},\\
\frac{7}{\sqrt{77}-7} &= \frac{\sqrt{77}+7}{4} = 3 + \frac{\sqrt{77}-5}{4},\\
\frac{4}{\sqrt{77}-5} &= \frac{\sqrt{77}+5}{13} = 1 + \frac{\sqrt{77}-8}{13},\\
\frac{13}{\sqrt{77}-8} &= \sqrt{77}+8,
\end{aligned}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned}
[8,1,3,2,3,1] = [8,1,3,2,4] &= \left[8,1,3,2+\frac{1}{4}\right]\\
&= \left[8,1,3,\frac{9}{4}\right] = \left[8,1,3+\frac{4}{9}\right]\\
&= \left[8,1,\frac{31}{9}\right] = \left[8,1+\frac{9}{31}\right]\\
&= \left[8,\frac{40}{31}\right] = \left[8+\frac{31}{40}\right]\\
&= \frac{351}{40},
\end{aligned}$$

dolayısıyla (a_m, b_m) çözümleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) &= (351, 40),\\
(a_{k+1}, b_{k+1}) &= (351a_k + 77 \cdot 40b_k, 40a_k + 351b_k)\\
&= (351a_k + 3080b_k, 40a_k + 351b_k).
\end{aligned}$$

Zira

$$\begin{aligned}351^2 &= 105300 + 17550 + 351 = 123201,\\ 77 \cdot 40^2 &= 77 \cdot 1600 = 112000 + 11200 = 123200,\end{aligned}$$

dolayısıyla ${a_1}^2 - 77{b_1}^2 = 1$; ayrıca

$$\begin{aligned}&(351a_k + 77 \cdot 40b_k)^2 - 77 \cdot (40a_k + 351b_k)^2\\ &\quad= (351^{-}77 \cdot 40^2){a_k}^2 + 77 \cdot (77 \cdot 40^2 - 351^2){b_k}^2\\ &\quad= {a_k}^2 - 77{b_k}^2.\end{aligned}$$

Problem 2. Aşağıdaki kalandaşlığı çözün.

$$0 \leqslant x < 101 \ \ \& \ \ 1000^{1050} \equiv x \pmod{101}$$

Çözüm. 101 asaldır, dolayısıyla

$$1000 \equiv -10 \pmod{101}, \qquad 1050 \equiv 50 \pmod{100}$$

olduğundan

$$1000^{1050} \equiv (-10)^{50} \pmod{101}.$$

Ayrıca

$$(-10)^2 \equiv 100 \equiv -1 \pmod{101}.$$

Bundan dolayı

$$\begin{aligned}1000^{1050} &\equiv (-10)^{50}\\ &\equiv ((-10)^2)^{25}\\ &\equiv 100^{25}\\ &\equiv (-1)^{25}\\ &\equiv -1\\ &\equiv 100 \pmod{101}.\end{aligned}$$

Problem 3. Sayma sayılarında, toplama ve çarpma birleşmelidir, ve tanıma göre

$$n^1 = n, \qquad n^{k+1} = n^k \cdot n.$$

Bu özellikleri kullanarak

$$k^{m+n} = k^m \cdot k^n$$

eşitliğini gösterin.

Çözüm. Verilen tanımdan

$$\begin{aligned}k^{m+1} &= k^m \cdot k\\ &= k^m \cdot k^1.\end{aligned}$$

Eğer bir ℓ için

$$k^{m+\ell} = k^m \cdot k^\ell$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}k^{m+(\ell+1)} &= k^{(m+\ell)+1} && [+ \text{ birleşmeli}]\\ &= k^{m+\ell} \cdot k && [\text{tanım}]\\ &= (k^m \cdot k^\ell) \cdot k && [\text{hipotez}]\\ &= k^m \cdot (k^\ell \cdot k) && [\cdot \text{ birleşmeli}]\\ &= k^m \cdot k^{\ell+1}. && [\text{tanım}]\end{aligned}$$

Problem 4. Sayma sayılarında aşağıdaki eşitliği gösterin.

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} d$$

Çözüm. Eşitlik

$$1 * \frac{1}{\mathrm{id}} = \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot (1 * \mathrm{id})$$

biçiminde yazılabilir. O zaman her taraf çarpımsaldır çünkü 1 ve id çarpımsaldır. Ayrıca

$$\sum_{d \mid p^n} \frac{1}{d} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^k},$$

$$\frac{1}{p^n} \sum_{d \mid p^n} d = \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{n} p^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k}{p^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p^k}.$$

Problem 5. Aşağıdaki kalandaşlığı çözün.

$$0 \leqslant x < 23 \ \ \& \ \ x^2 + 5x + 10 \equiv 0 \pmod{23}$$

Çözüm. 23'e göre

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x + 10 \equiv 0 &\iff x^2 - 18x \equiv -10 \\
&\iff (x-9)^2 \equiv 81 - 10 \\
&\iff (x-9)^2 \equiv 2 \\
&\iff (x-9)^2 \equiv 5^2 \\
&\iff x - 9 \equiv \pm 5 \\
&\iff x \equiv 14, 4.
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x + 10 \equiv 0 &\iff 4x^2 + 20x \equiv -40 \\
&\iff (2x+5)^2 \equiv -15 \equiv 8 \equiv 10^2 \\
&\iff 2x + 5 \equiv \pm 10 \\
&\iff 2x \equiv 5, 8 \\
&\iff x \equiv 60, 96 \\
&\iff x \equiv 14, 4.
\end{aligned}$$