

Alıştırmalar

Aksiyomatik Kümeler Kuramı

David Pierce

Matematik Bölümü, MSGSÜ

5 Aralık 2019

Alıştırma A. Bir \mathbf{F} ordinal işlemi için, eğer her α için,

$$\beta < \mathbf{F}(\alpha) < \gamma$$

kořulunu saęlayan her β ve γ için,

$$\delta < \alpha < \zeta$$

kořulunu saęlayan bazı δ ve ζ için, her ξ için

$$\delta < \xi < \zeta \implies \beta < \mathbf{F}(\xi) < \gamma$$

ise, o zaman tanıma göre \mathbf{F} **sürekli**dir. \mathbf{F} kesin artan olmak üzere \mathbf{F} 'nin sürekli olmasının gerek ve yeter bir koşulunun, her α limiti için

$$\mathbf{F}(\alpha) = \sup \mathbf{F}[\alpha]$$

denkleminin doğru olması olduęunu gösterin.

Alıştırma B. Örnekler varsa, birini verin; yoksa olmadığını kanıtlayın.

1. Küme olmayan bir sınıf.
2. Sınıf olmayan bir küme.
3. Kendisini içermeyen bir küme.
4. Kendisini kapsamayan bir küme.
5. Ordinal olmayan, \in tarafından iyisiralanan bir küme.
6. Ordinal olmayan, boş olmayan, geçişli bir küme.
7. Elemanları ordinal olan, en küçük elemanı 1 olan bir küme.
8. Ordinal olan, en küçük elemanı 1 olan bir küme.
9. Elemanları ordinal olan, en küçük elemanı olmayan bir küme.
10. Kesin artan, normal olmayan bir ordinaler işlemi.
11. Sürekli olan, kesin artmayan bir ordinaler işlemi.
12. Kesin azalan bir ordinaler işlemi.
13. Sayılamaz bir küme.
14. Küme olmayan, sayılabilir bir sınıf.

Alıştırma C. Aşağıdaki bir ordinaler eşitliği her durumda doğru ise eşitliği kanıtlayın; değilse bir karşıt örnek verin.

- | | |
|---|--|
| 1. $\alpha + 0 = \alpha$. | 7. $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$. |
| 2. $0 + \alpha = \alpha$. | 8. $\alpha + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$. |
| 3. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$. | 9. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. |
| 4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. | 10. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. |
| 5. $\alpha \cdot 1 = \alpha$. | 11. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. |
| 6. $1 \cdot \alpha = \alpha$. | 12. $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. |
| 13. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$. | |
| 14. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta^2$. | |

Alıştırma D. Cantor normal biçimleri bulun:

- | | |
|---|---|
| 1. $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3$. | 6. $(\omega + 4) \cdot 3$. |
| 2. $1 + \omega^2 + \omega + \omega^3$. | 7. $(\omega^2 + 3) \cdot (\omega + 4)$. |
| 3. $1 + \omega^3 + \omega + \omega^2$. | 8. $(\omega + 4) \cdot (\omega^2 + 3)$. |
| 4. $\omega^3 + \omega + \omega^2 + 1$. | 9. $(\omega^2 \cdot 5 + 3) \cdot (\omega + 4)$. |
| 5. $3 \cdot (\omega + 4)$. | 10. $(\omega + 4) \cdot (\omega^2 \cdot 5 + 3)$. |