

Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

David Pierce

25 Nisan 2014

Problem 1. Cevaplarınızı kısaca açıklayın: // *Briefly explain your answers:*

- a) Her küme bir sınıf mıdır? // *Is every set a class?*
- b) Her sınıf bir küme midir? // *Is every class a set?*

Çözüm.

- a) Evet: Her a kümesi, $\{x: x \in a\}$ sınıfıdır.
- b) Hayır: Russell Paradoksuna göre $\{x: x \notin x\}$ sınıfı, küme değildir.

Problem 2. a) **Normal** ordinal işlemlerini tanımlayın. //
*Define the **normal** ordinal operations.*

b) Ordinal $\xi \mapsto \xi + \xi$ işleminin normal olup olmadığını gösterin. // *Show whether the ordinal operation $\xi \mapsto \xi + \xi$ is normal.*

Çözüm. a) Eğer F kesin artan ve her α limiti için

$$F(\alpha) = \sup_{\xi < \alpha} F(\xi)$$

ise, F normaldir.

b) Normal değildir:

$$\sup_{x \in \omega} (x + x) = \omega < \omega + \omega.$$

Problem 3. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \\ (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma \end{array} \right\}$ eşitliklerinin biri her zaman doğru ise kanıtlayın. // *If one of the equations is always true, prove it.*

Çözüm. i) $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$

ii) Bir γ için

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad (1)$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma') &= \alpha \cdot (\beta + \gamma)' \\ &= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \alpha \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma'. \end{aligned}$$

iii) δ limit olsun ve $\gamma < \delta$ ise

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

olsun. $\alpha > 0$ varsayılabılır. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \delta) &= \alpha \cdot \sup_{\xi < \delta} (\beta + \xi) && \text{[tanım]} \\ &= \sup_{\xi < \delta} (\alpha \cdot (\beta + \xi)) && \text{[}\xi \mapsto \alpha \cdot \xi \text{ normal]} \\ &= \sup_{\xi < \delta} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi) && \text{[hipotez]} \\ &= \alpha \cdot \beta + \sup_{\xi < \delta} (\alpha \cdot \xi) && \text{[}\xi \mapsto \alpha \cdot \beta + \xi \text{ normal]} \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta. && \text{[tanım]} \end{aligned}$$

Problem 4. a) Geçişli kümeler sınıfını tanımlayan, serbest değişkeni x olan bir formül yazın. “ \subseteq ” işaretini kullanabilirsiniz. // *Write down a formula in the free variable x defining the class of transitive sets. You may use the symbol \subseteq .*

b) Küme olan göndermeler sınıfını tanımlayan, serbest değişkeni w olan bir formül yazın. “ $=$ ” işaretini ve “ (x, y) ” gibi ifadeleri kullanabilirsiniz. // *Write down a formula in the free variable z defining the class of functions that are sets. You may use the symbol $=$ and expressions like (x, y) .*

Çözüm. a) $\forall y (y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$.

b) $\forall z (z \in w \Rightarrow \exists x \exists y (x, y) = z)$

$\wedge \forall x \forall y \forall z ((x, y) \in w \wedge (x, z) \in w \Rightarrow y = z)$.