Düzlemin İzometrileri
TASLAK

David Pierce

10 Mayıs 2016
Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

V, $\mathbb{R}^n$ gerçel iççarpım uzayı olsun. V'nin bir **izometri,** uzunlukları koruyan bir eşleşmedir.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Isom}(V) &= \{V\text{'nin izometrileri}\},\\
\operatorname{GL}(V) &= \{V\text{'nin lineer eşleşlemeleri}\},\\
\operatorname{O}(V) &= \operatorname{Isom}(V) \cap \operatorname{GL}(V)
\end{aligned}$$

olsun. Bunlar, bileşke alma altında *grupturlar.*

Teorem 1. $\operatorname{O}(V) = \{g \in \operatorname{Isom}(V) \colon g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\}$.

Kanıt. $\mathrm{Isom}(V)$ grubunun her g elemanı, köşeleri $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ve $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ olan her paralelkenarının kenarlarının ve köşegenlerinin uzunluklarını korur. Özel olarak $g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ ise

$$g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=g(\boldsymbol{a})+g(\boldsymbol{b}).$$ □

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ise

$$\mathrm{T}_A\colon V \to V, \qquad \mathrm{T}_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

olsun. Burada

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}.$$

Teorem 2. $\mathrm{GL}(V) = \{\mathrm{T}_X\colon \det(X) \neq 0\}$,
$\mathrm{O}(V) = \{\mathrm{T}_X\colon X^{\mathrm{t}}X = \mathrm{I}_n\}$.

Eğer $\boldsymbol{a} \in V$ ise

$$\mathrm{t}_{\boldsymbol{a}}\colon V \to V, \qquad \mathrm{t}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}$$

olsun, ve

$$\mathrm{T}(V) = \{\mathrm{t}_{\boldsymbol{x}}\colon \boldsymbol{x} \in V\}$$

olsun. Burada $\mathrm{t}_{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{a}$ ile **ötelemedir.** O zaman

$$\mathrm{T}(V) < \mathrm{Isom}(V),$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{t}_{\boldsymbol{x}}\colon V \xrightarrow{\cong} \mathrm{T}(V).$$

Teorem 3. $\mathrm{T}(V) \times \mathrm{O}(V) \approx \mathrm{Isom}(V)$, *yani bu iki küme eşleniktir. Aslında*

$$(\mathrm{t}_{\boldsymbol{x}}, \xi) \mapsto \mathrm{t}_{\boldsymbol{x}} \circ \xi,$$

bir eşlemedir.

Kanıt. Verilen gönderme, birebirdir (**alıştırma**). Göndermenin tersi,

$$\xi \mapsto (\mathrm{t}_{\xi(\mathbf{0})}, \mathrm{t}_{-\xi(\mathbf{0})} \circ \xi)$$

çünkü $\alpha \in \mathrm{Isom}(V)$ ve $\beta = \mathrm{t}_{-\alpha(\mathbf{0})} \circ \alpha$ ise $\beta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, dolayısıyla $\beta \in \mathrm{O}(V)$; ve $\alpha = \mathrm{t}_{\alpha(\mathbf{0})} \circ \beta$. □

Bir G grubunun H ve K altgrupları için

$$G = HK, \qquad\qquad H \cap K = \{\mathrm{e}\},$$

olsun. Bu şekilde $(x, y) \mapsto xy \colon H \times K \xrightarrow{\approx} G$. Eğer

$$H \lhd G$$

ise, o zaman

$$G = H \rtimes K$$

yazarız, ve bu durumda $h_i \in H$, $k_i \in K$ ise

$$h_1k_1 \cdot h_2k_2 = h_1(k_1h_2{k_1}^{-1}) \cdot k_1k_2, \qquad k_1h_2{k_1}^{-1} \in H.$$

$G = HK$ durumunda $H \lhd G$ göstermek için, $k \in K$ olduğunda $kHk^{-1} = H$ göstermek yeter.

Teorem 4. $\mathrm{Isom}(V) = \mathrm{T}(V) \rtimes \mathrm{O}(V)$.

Kanıt. $\mathrm{T}(V) \lhd \mathrm{Isom}(V)$ göstermek yeter. Eğer $\boldsymbol{a} \in V$ ve $\alpha \in \mathrm{O}(V)$ ise, o zaman

$$\alpha \circ \mathrm{t}_{\boldsymbol{a}} \circ \alpha^{-1} = \mathrm{t}_{\alpha(\boldsymbol{a})},$$

çünkü α lineer olduğundan

$$\alpha \circ \mathrm{t}_{\boldsymbol{a}} \circ \alpha^{-1}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{a} + \alpha^{-1}(\boldsymbol{x})) = \alpha(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{x} = \mathrm{t}_{\alpha(\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{x}). \quad □$$

Şonuc olarak $\mathrm{Isom}(V) \cong V \rtimes \mathrm{O}(V)$. Özel olarak

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$$

çünkü $\mathrm{O}(\mathbb{R}) \cong \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 = 1\} = \{\pm 1\}$.

Genelde

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(V) &= \{\mathrm{T}_X \colon \det X = 1\}, \\ \mathrm{O}(V) &= \{\mathrm{T}_X \colon \det X = \pm 1\}. \end{aligned}$$

Şimdi $n = 2$ olsun. Bu durumda $V = \mathbb{R}^2$ ve

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(V) &= \{\mathbf{0} \text{ etrafında döndürmeler}\}, \\ \mathrm{O}(V) \smallsetminus \mathrm{SO}(V) &= \{\mathbf{0}\text{'dan geçen doğrular etrafından yansımalar}\}. \end{aligned}$$

Aslında

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(V) &= \left\{\mathrm{T}_X \colon X = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \wedge 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\}, \\ \mathrm{SO}(V) &= \left\{\mathrm{T}_X \colon X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \wedge 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\}. \end{aligned}$$

Kısaltma olarak

$$\rho_\theta = \mathrm{T}_{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}, \qquad \mathrm{r}_0 = \mathrm{T}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

olsun. $V = \mathbb{C}$ düşünülebilir, ve bu şekilde

$$\rho_\theta(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot z, \qquad \mathrm{r}_0(z) = \overline{z}.$$

Teorem 5. $\mathrm{O}(V) = \mathrm{SO}(V) \rtimes \langle \mathrm{r}_0 \rangle$.

Kanıt. ${\mathrm{r}_0}^{-1} = \mathrm{r}_0$ ve $\mathrm{r}_0 \circ \rho_\theta \circ \mathrm{r}_0 = \rho_{-\theta}$. (Bu eşitliker, ya matrisler ya da karmaşık sayılar ile doğrulanabilir.) □

Şimdi

$$\mathrm{Isom}(V) = \mathrm{T}(V) \rtimes \big(\mathrm{SO}(V) \rtimes \langle \mathrm{r}_0 \rangle\big).$$

Özel olarak $\mathrm{Isom}(V)$ grubunun her α elemanı için, V'nin bir ve tek bir $\boldsymbol{a}$ elemanı için, bir ve tek bir θ açısı için

$$\alpha \in \big\{\mathrm{t}_{\boldsymbol{a}} \circ \rho_\theta,\ \mathrm{t}_{\boldsymbol{a}} \circ \rho_\theta \circ \mathrm{r}_0\big\}.$$

Ama başka bir biçimde α daha iyi anlaşılabilir.

Tekrar $\boldsymbol{a} \in V$ ve $\rho_\theta \in \mathrm{SO}(V)$ olsun. Burada

$$\mathrm{t}_{\boldsymbol{a}}{}^{-1} = \mathrm{t}_{-\boldsymbol{a}}, \qquad \rho_\theta{}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \rho_{-\theta}(\boldsymbol{x}).$$

O zaman

- $\boxed{\mathrm{t}_{\boldsymbol{a}},}$ $\boldsymbol{a}$ ile **ötelemedir;**
- $\boxed{\rho_\theta,}$ $\mathbf{0}$ noktası etrafında θ açısından **döndürmedir;**
- $\boxed{\mathrm{r}_0,}$ $\{t(1,0) \colon t \in \mathbb{R}\}$ doğrusu etrafında **yansımadır;**
- $\boxed{\mathrm{t}_{\boldsymbol{a}} \circ \rho_\theta \circ \mathrm{t}_{-\boldsymbol{a}},}$ $\boldsymbol{a}$ noktası etrafında θ açısından **döndürmedir;**
- $\boxed{\rho_\theta \circ \mathrm{r}_0 \circ \rho_{-\theta},}$ $\{t(\cos\theta, \sin\theta) \colon t \in \mathbb{R}\}$ doğrusu etrafında **yansımadır;**
- $\boxed{\mathrm{t}_{\boldsymbol{a}} \circ \rho_\theta \circ \mathrm{r}_0 \circ \rho_{-\theta} \circ \mathrm{t}_{-\boldsymbol{a}},}$ $\{\boldsymbol{a} + t(\cos\theta, \sin\theta) \colon t \in \mathbb{R}\}$ doğrusu etrafında **yansımadır;**
- $b \in \mathbb{R}$ ise $\boxed{\mathrm{t}_{b(\cos\theta,\sin\theta)} \circ \mathrm{t}_{\boldsymbol{a}} \circ \rho_\theta \circ \mathrm{r}_0 \circ \rho_{-\theta} \circ \mathrm{t}_{-\boldsymbol{a}},}$ $b(\cos\theta, \sin\theta)$ ile $\{\boldsymbol{a} + t(\cos\theta, \sin\theta) \colon t \in \mathbb{R}\}$ doğrusu etrafında **kaydırma yansımasıdır.**

Lemma. *Her θ açısı ve a karmaşık sayısı için*

$$\mathrm{r}_0 \circ \rho_\theta = \rho_{-\theta} \circ \mathrm{r}_0,$$
$$\mathrm{r}_0 \circ \mathrm{t}_a = \mathrm{t}_{\overline{a}} \circ \mathrm{r}_0,$$
$$\rho_\theta \circ \mathrm{t}_a = \mathrm{t}_{a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} \circ \rho_\theta.$$

Teorem 6. $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ *grubunun aşikâr olmayan her elemanı, ya öteleme, ya döndürme, ya yansıma, ya da kaydırma yansımasıdır.*

Kanıt. Gördüğümüz gibi $\mathrm{Isom}(\mathbb{C})$ grubunun her α elemanı için, $\mathbb{C}$'nin bir a elemanı için, bir θ açısı için ya $\alpha = \mathrm{t}_a \circ \rho_\theta$, ya da $\alpha = \mathrm{t}_a \circ \rho_\theta \circ \mathrm{r}_0$.

Genelde $\mathbb{C}$'nin her b elemanı için

$$\mathrm{t}_a \circ \rho_\theta = \mathrm{t}_b \circ \rho_\theta \circ \mathrm{t}_{-b} \iff \mathrm{t}_{a-b} \circ \rho_\theta = \rho_\theta \circ \mathrm{t}_{-b},$$
$$a - b = -b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \iff a = b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}).$$

O zaman $\theta \neq 0$ ise lemmaya göre

$$\mathrm{t}_a \circ \rho_\theta = \mathrm{t}_{a/(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})} \circ \rho_\theta \circ \mathrm{t}_{-a/(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})};$$

özel olarak $\mathrm{t}_a \circ \rho_\theta$, bir döndürmedir.

Lemmaya göre de

$$\rho_\theta \circ \mathrm{r}_0 = \rho_{\theta/2} \circ \mathrm{r}_0 \circ \rho_{-\theta/2},$$

ve bu bir yansımadır. Genelde

$$\mathrm{r}_\theta = \rho_\theta \circ \mathrm{r}_0 \circ \rho_{-\theta}$$

olsun. O zaman bir kaydırma yansımasını

$$\mathrm{t}_{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} \circ \mathrm{t}_a \circ \mathrm{r}_\theta \circ \mathrm{t}_{-a}$$

biçiminde yazabiliriz. Lemmanın ikinci eşitliğini

$$\mathrm{r}_0 \circ \mathrm{t}_a = \mathrm{t}_{\mathrm{r}_0(a)} \circ \mathrm{r}_0$$

biçiminde yazabiliriz, ve benzer şekilde

$$\mathrm{r}_\theta \circ \mathrm{t}_a = \mathrm{t}_{\mathrm{r}_\theta(a)} \circ \mathrm{r}_0.$$

Şimdi φ açısı ve $\mathbb{C}$'nin a elemanı verilirse

$$b = \frac{a + \mathrm{r}_\varphi(a)}{2}, \qquad\qquad c = \frac{a - \mathrm{r}_\varphi(a)}{4}$$

olsun. O zaman $b = |b| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ ve

$$\mathrm{t}_b \circ \mathrm{t}_c \circ \mathrm{r}_\varphi \circ \mathrm{t}_{-c} = \mathrm{t}_{b+c+\mathrm{r}_\varphi(-c)} \circ \mathrm{r}_\varphi = \mathrm{t}_a \circ \rho_{2\varphi} \circ \mathrm{r}_0.$$

Burada $2\varphi = \theta$ olabildiğinde $\mathrm{t}_a \circ \rho_\theta \circ \mathrm{r}_0$ izometrisi, $b = 0$ durumunda yansımadır, diğer durumlarda kaydırma yansımasıdır. □