# Cebir ile Geometri

David Pierce

17 Mart 2025 taslağı

# İçindekiler


| | | |
|---|---|---|
| 1 | Eksenler | 3 |
| 2 | Doğrular | 4 |
| 3 | Paralelkenarlar | 8 |
| 4 | Üçgenler | 18 |
| 5 | Çemberler | 21 |
| 6 | Açılar | 23 |

# 1 Eksenler

**Analitik geometride** *Öklid düzlemi* olarak $\mathbb{R}^2$'yi ve *Öklid uzayı* olarak $\mathbb{R}^3$'ü, bunların *cebirsel yapısını* kullanarak inceleriz.

$\mathbb{R}^2$'nin elemanları, girdileri gerçel sayı olan sıralı ikililerdir. Bunlardan biri

$$(a, b)$$

olduğunda

- $a$, onun $\boldsymbol{x}$ **koordinatıdır,** ve yeri, yatay $\boldsymbol{x}$ **ekseninindedir;**
- $b$, onun $\boldsymbol{y}$ **koordinatıdır,** ve yeri, dikey $\boldsymbol{y}$ **ekseninindedir.**

Eksenlerin kesişim noktası, her birinin 0 noktasıdır. Eğer $a$ ve $b$'nin her biri 0'dan farklı ise, o zaman $x$ ekseninin $a$ noktası, $y$ ekseninin $b$ noktası, ve eksenlerin ortak 0 noktası, bir dikdörtgenin üç köşesidir, ve dördüncü köşe, $(a, b)$'dir. Öyle düşünüyoruz, ama düşüncemizi kesinleştirmek zorundayız.

# 2 Doğrular

Resmi tanımımıza göre $\mathbb{R}^2$'nin **doğruları,**

$$(a, b) \neq (0, 0)$$

olmak üzere

$$ax + by = c$$

**lineer denklemlerinin** çözüm kümeleridir. Bir denklem, onun çözüm kümesini **tanımlar.**

Eğer iki doğru kesişmezse, o zaman tanıma göre bu doğrular birbirine **paraleldir.** Bir doğru, kendisine de paralel olsun.

**Teorem 1.** $\mathbb{R}^2$*'de denklemleri*

$$ax + by = e, \tag{1}$$

$$cx + dy = f \tag{2}$$

*olan doğruların paralel olması için gerek ve yeter bir koşul,*

$$ad - bc = 0. \tag{3}$$

*Bir* $(g, h)$ *noktasından geçen, denklemi* (1) *olan doğruya paralel olan tek bir doğru vardır, ve bu doğrunun bir denklemi,*

$$ax + by = ag + bh. \tag{4}$$

*Eğer koşul 3'ü sağlanmazsa, o zaman denklemleri* (1) *ve* (2) *olan doğruların tek bir kesişim noktası vardır, ve bu nokta,*

$$\left(\frac{de - bf}{ad - bc}, \frac{af - ce}{ad - bc}\right). \tag{5}$$

**Alıştırma 1.** Teoremi kanıtlayın.

**Alıştırma 2.** $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ve $f$ için değerler seçip denklemler (1) ve (2)'nin ortak çözümlerini bulun. Bunu (5)'i kullanmadan yapabilirsiniz.

Teoremde (4), bir doğrunun *bir* denklemidir, çünkü öyle bir denklem, 0 olmayan gerçel bir sayı tarafından çarpılırsa, yeni denklem aynı doğruyu tanımlar.

Eğer tanıma göre

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ise, o zaman (5)'teki çözüm,

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}\right).$$

Teoremin bu parçası, **Cramer Kuralıdır.**

**Teorem 2.** $\mathbb{R}^2$*'de eğer*

$$(a, b), \qquad\qquad (c, d)$$

*birbirinden farklı ise, o zaman onlardan geçen tek bir doğru vardır, ve bu doğrunun bir denklemi,*

$$(d - b)x + (a - c)y = ad - bc. \tag{6}$$

**Alıştırma 3.** Teoremi kanıtlayın.

Eğer $a \neq c$ ise, o zaman teoremdeki doğrunun başka bir denklemi,

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{d - b}{c - a}.$$

Genelde teoremdeki doğrunun denklemi, öyle bir

$$ex + fy = g$$

ki $(e, f, g)$,

$$\begin{aligned} ax + by &= z, \\ cx + dy &= z \end{aligned}$$

sistemini çözer.

**Alıştırma 4.** $\mathbb{R}$'den $a$, $b$, $c$, ve $d$ için değerler seçip $\mathbb{R}^2$'de $(a, b)$ ve $(c, d)$'den geçen doğrunun bir denklemini bulun.

Tanım ve teoremlerimiz sayesinde $\mathbb{R}^2$'de aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. İki farklı noktadan bir ve tek bir doğru geçer.

2. Verilen bir noktadan, verilen bir doğruya paralel olan bir ve tek bir doğru geçer.

3. Aynı doğruda olmayan en az üç nokta vardır.

Bu şekilde, tanıma göre, $\mathbb{R}^2$ bir **afin düzlemdir.**

**Alıştırma 5.** $\mathbb{R}^2$'de $(a, b)$, $(c, d)$, ve $(e, f)$ noktalarının aynı doğruda olması için uygun bir yeter ve gerek koşul bulun.

**Teorem 3.** *Bir afin düzlemin doğruları kümesinde paralellik bir denklik bağıntısıdır.*

**Alıştırma 6.** Teoremi kanıtlayın.

# 3 Paralelkenarlar

**Teorem 4.** *Bir afin düzlemde eğer $ABC$ bir üçgen ise (yani $A$, $B$, ve $C$ noktaları aynı doğruda olmazsa), o zaman bir ve tek bir $D$ noktası için $ABCD$ bir paralelkenardır.*

**Alıştırma 7.** Teoremi kanıtlayın.

Bir afin düzlemde, Şekil 1'deki gibi, $ABED$ ve $BCFE$ dörtkenarlarının her biri bir paralelkenar olsun. O zaman

$$AD \parallel BE, \qquad BE \parallel CF,$$

dolayısıyla Teorem 3 sayesinde

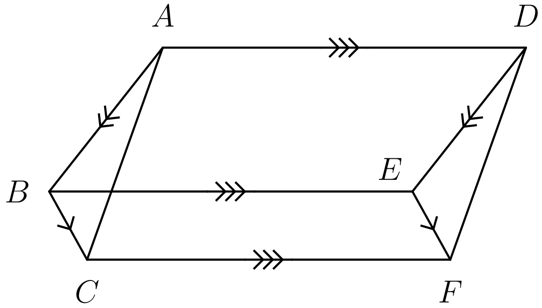
$$AD \parallel CF.$$

Ayrıca

$$AB \parallel DE, \qquad BC \parallel EF. \tag{7}$$

Bununla beraber

$$AC \parallel DF \tag{8}$$




Şekil 1: Desargues Teoremi, paralel durum

paralelliğinin doğru olup olmadığı açık değildir. $\mathbb{R}^2$'de doğru olacak. Bunu göstermek için $\mathbb{R}^2$'nin *cebirsel* yapısını kullanacağız.

**Teorem 5.** *$\mathbb{R}^2$'de her*

$$(x, y) \mapsto (x + e, y + f)$$

*işleminin tersi vardır, ve işlem her doğrunun noktalarını paralel bir doğrunun noktalarına gönderir.*

*Kanıt.* Verilen işlemin tersi,

$$(x, y) \mapsto (x - e, y - f).$$

Eğer $(a, b)$ ve $(c, d)$ birbirinde farklı ise, o zaman

$$(a + e, b + f), \qquad\qquad (c + e, d + f)$$

noktaları da birbirinden farklıdır, ve bu durumda, Teorem 2 sayesinde, onlardan geçen doğrunun denklemi

$$\begin{multline}(d-b)x+(a-c)y\\ =ad-bc+(d-b)e+(a-c)f. \tag{9}\end{multline}$$

Teorem 1 sayesinde bu doğru, (6)'nın tanımladığı doğruya paraleldir. Ayrıca, eğer $(g,h)$, (6)'yı sağlarsa, o zaman $(g+e,h+f)$, (9)'u sağlar. □

Teoremdeki işlem, $(a,b)$ ile **ötelemedir.**

O şekilde devam edebiliriz, ama bunu kolaylaştırmak için birkaç tanım vereceğiz.

Bir afin düzlemin noktaları için $A$, $B$, ve $C$ gibi harfler kullanıyoruz. Eğer o afin düzlem $\mathbb{R}^2$ ise, o zaman $A$,

$$(a_1,a_2)$$

olsun. Bu sıralı ikiliyi, kısaca

$$\boldsymbol{a}$$

olarak yazalım. O zaman

$$A=(a_1,a_2)=\boldsymbol{a}. \tag{10}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}B&=(b_1,b_2)=\boldsymbol{b},\\ C&=(c_1,c_2)=\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

vesaire; ayrıca

$$O = (0, 0) = \mathbf{0} \tag{11}$$

olsun. Bazen $(x, y)$ yerine $(x_1, x_2)$ ve $\boldsymbol{x}$ ifadesini kullanacağız.

Şimdi tanıma göre

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \\ -\boldsymbol{a} &= (-a_1, -a_2) \end{aligned}$$

olsun. O zaman

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

kısaltmasını kullanabiliriz.

**Teorem 6.** $\mathbb{R}^2$*'de*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{a} + \mathbf{0} &= \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

**Alıştırma 8.** Teoremi kanıtlayın.

**Alıştırma 9.** $\mathbb{R}^2$'de sadece Teorem 6'yı kullanarak, her

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü var olduğunu gösterin, ve sonuç olarak

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} \implies \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$$

gerektirmesini gösterin.

Teorem 6 sayesinde, tanımladığımız toplama işlemi ile, $\mathbb{R}^2$ bir **abelyan gruptur.** O zaman

- toplama ile $\mathbb{R}$ ve
- çarpma ile $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

abelyan gruplardır. $\mathbb{R}^3$ hariç başka abelyan gruplara bakmayacağız.

Bir afin düzlemde, girdileri iki farklı nokta olan bir sıralı ikili, bir **yönlü doğru parçasıdır.** Eğer bu girdiler $A$ ve $B$ ise, o zaman yönlü doğru parçasını, $(A, B)$ yerine

$$\overrightarrow{AB}$$

olarak yazacağız. Şimdi kural (10)'u kullanılarak, tanıma göre

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c} \tag{12}$$

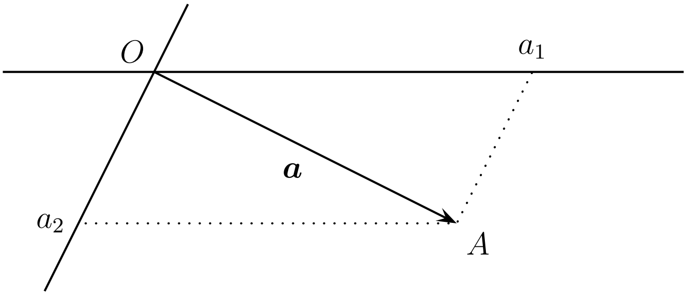
olsun. Buradaki

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$$

eşitliğine göre $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$, $\mathbb{R}^2$'nin *aynı* elemanıdır, ama aynı zamanda

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

eşitliğinde $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$, yönlü doğru parçası olarak birbirinden farklı olabilir. Bununla beraber yönlü doğru parçalarının eşitliği bir denklik bağıntısıdır.




Şekil 2: Bir vektör

**Teorem 7.** $\mathbb{R}^2$*'de her* $\overrightarrow{BC}$ *yönlü doğru parçası için, bir ve tek bir* $A$ *noktası için,*

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}.$$

**Alıştırma 10.** Teoremi kanıtlayın.

Dediğimiz gibi, $\mathbb{R}^2$'nin aynı $(a_1, a_2)$ elemanını

- hem bir afin düzlemin $A$ noktası olarak,
- hem bir abelyan grubun $\boldsymbol{a}$ elemanı olarak

düşünebiliriz. Şimdi, Teorem 7 sayesinde $\boldsymbol{a}$'yı, $\overrightarrow{OA}$'nın eşitlik sınıfı olarak düşünebiliriz. Bu şekilde $\boldsymbol{a}$ bir **vektördür.** Şekil 2'ye bakın.

**Teorem 8.** $\mathbb{R}^2$*'de* $ABC$ *bir üçgen ve* $D$ *bir nokta olsun.* $ABDC$*'nin bir paralelkenar olması için gerek ve yeter* *bir koşul,*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}. \tag{13}$$

*Özel olarak bu eşitlik*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

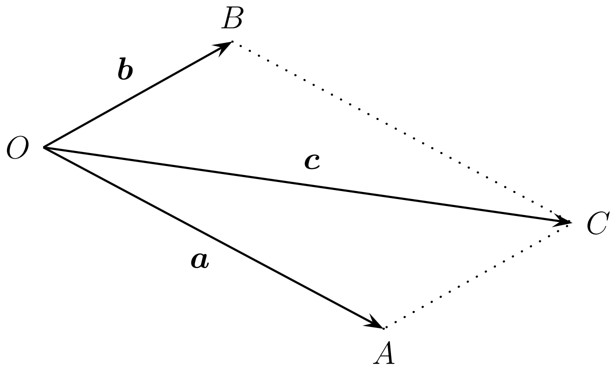
*eşitliğini gerektirir.*

**Alıştırma 11.** Teoremi kanıtlayın.

Sonraki teorem sayesinde, $\mathbb{R}$'nin afin yapısından ve $\mathbf{0}$ elemanından $\mathbb{R}$'nin abelyan grup yapısını elde edebiliriz. İki duruma bakmak gerekecek. $A$ ve $B$, $O$'dan farklı olsun.

- Eğer $A$ ve $B$, $O$ ile aynı doğruda ise, o zaman bu doğruyu ya $OA$ ya da $OB$ olarak yazabiliriz, ve dediğimiz gibi
  $$OA \parallel OB.$$
  O zaman $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ de birbirine **paralel** olsun:
  $$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}.$$
- Diğer durumda $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ birbirine paralel değildir:
  $$\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}.$$

**Teorem 9.** *$\mathbb{R}^2$'de $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{0}$'dan farklı olsun.*




Şekil 3: İki vektörün toplamı: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

1. *Eğer Şekil 3'teki gibi* $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$ *ise, o zaman*

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

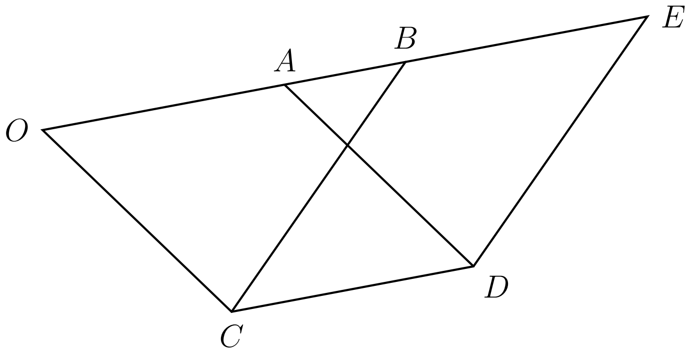
   *olmak üzere $AOBC$ bir paralelkenardır.*

2. *Eğer Şekil 4'teki gibi* $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ *ise, ama* $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{c}$ *ise, o zaman*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

   *olmak üzere $BCDE$ bir paralelkenardır.*

**Alıştırma 12.** Teoremi kanıtlayın.




Şekil 4: İki paralel vektörün toplamı

**Alıştırma 13.** Eğer $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$, bir $\boldsymbol{c}$ vektörü ile aynı doğruda değilse, o zaman

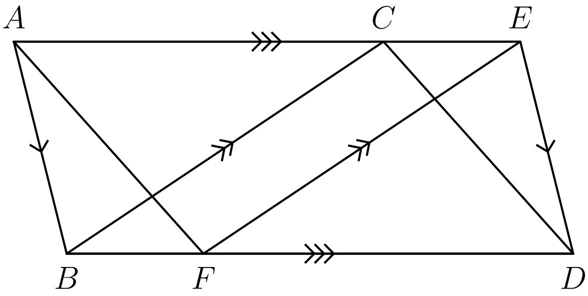
$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

olmak üzere $ACBD$'nin bir paralelkenar olduğunu gösterin.

**Alıştırma 14** (Desargues Teoremi, paralel durum)**.** $\mathbb{R}^2$'de Şekil 1'in durumunda (8)'i kanıtlayın.

**Alıştırma 15** (Pappus Teoremi, paralel durum)**.** $\mathbb{R}^2$'de, eğer Şekil 5'teki gibi $A$, $C$, ve $E$ bir doğruda ise, ve $B$, $D$, ve $F$ farklı ve paralel bir doğruda ise, ve paralellikler (7) doğru ise, o zaman

$$CD \parallel FA \tag{14}$$




Şekil 5: Pappus Teoremi, paralel durum

paralelliğini gösterin.

Bir afin düzlemde, eğer Desargues Teoreminin paralel durumu doğru ise, o zaman Pappus Teoreminin paralel durumu da doğrudur; ayrıca, eğer bir **0** noktasını seçersek, o zaman Teorem 9'daki gibi düzlemimiz bir abelyan grup olur.

# 4 Üçgenler

$\mathbb{R}$'nin her $b$ elemanı için, $\mathbb{R}^2$'nin her $\boldsymbol{a}$ elemanı için,

$$b \cdot \boldsymbol{a} = (ba_1, ba_2)$$

olsun. Zaten $\boldsymbol{a}$'nin bir vektör olduğunu söyledik; şimdi $b$ bir **skalerdir.**

**Teorem 10.** $\mathbb{R}^2$ *'de*

$$\begin{aligned}
(b + c) \cdot \boldsymbol{a} &= b \cdot \boldsymbol{a} + c \cdot \boldsymbol{a}, \\
c \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= c \cdot \boldsymbol{a} + c \cdot \boldsymbol{b}, \\
(bc) \cdot \boldsymbol{a} &= b \cdot (c \cdot \boldsymbol{a}), \\
1 \cdot \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}.
\end{aligned}$$

**Alıştırma 16.** Teoremi gösterin.

Teoremler 6 ve 10 sayesinde $\mathbb{R}^2$ bir **vektör uzayıdır.**

**Alıştırma 17.** $\mathbb{R}^2$'de sadece Teoremler 6 ve 10'u kullanarak

$$-(b \cdot \boldsymbol{a}) = (-b) \cdot \boldsymbol{a}$$

eşitliğini ve

$$b \cdot \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0} \iff b \neq 0 \ \& \ \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0},$$

denkliğini gösterin, ve $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ olmak üzere her

$$x \cdot \boldsymbol{a} = b \cdot \boldsymbol{a}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümünün var olduğunu gösterin.

**Teorem 11.** *$\mathbb{R}^2$'de, farklı $A$ ve $B$ noktalarından geçen doğrunun noktaları, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$(1-t) \cdot \boldsymbol{a} + t \cdot \boldsymbol{b} \tag{15}$$

*vektörleridir.*

**Alıştırma 18.** Teoremi gösterin.

Eğer

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}, \qquad\qquad \boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{e},$$

ve

$$\begin{aligned}(1-t) \cdot \boldsymbol{a} + t \cdot \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{c},\\ (1-t) \cdot \boldsymbol{d} + t \cdot \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{f}\end{aligned}$$

ise, $(A, C, B)$ ve $(D, F, E)$ sıralı üçlüleri *denk* olsun. Bu denklik için, bir işaret kullanmayacağız, ama $(A, C, B)$'nin denklik sınıfı

$$AC : AB$$

olacak; bu sınıf bir **orandır.** Eğer $AC : AB$ ve $DF : DE$ aynı ise, o zaman

$$AC : AB :: DF : DE$$

**orantısını** yazarız.

**Teorem 12** (Thales)**.** *$\mathbb{R}^2$'de eğer $ABC$ bir üçgen ise, ve ayrıca $A$'dan farklı olan $E$ ve $F$, sırasıyla $AB$ ve $AC$'nin noktası ise, o zaman*

$$EF \parallel BC \iff AE : AB :: AF : AC.$$

**Alıştırma 19.** Teoremi gösterin.

**Alıştırma 20** (Desargues Teoremi, paralel durum)**.** $\mathbb{R}^2$'de, eğer $ABC$ ve $DEF$ üçgenlerinin ortak köşesi yoksa, ama $AD$, $BE$, ve $EF$ doğrularının ortak noktası varsa, ve paralellikler (7)'yi doğru ise, o zaman paralellik (8)'in de doğru olduğunu gösterin.

**Alıştırma 21** (Pappus Teoremi, paralel durum)**.** $\mathbb{R}^2$'de, eğer $A$, $C$, ve $E$ bir doğruda ise, ve $B$, $D$, ve $F$ paralel olmayan bir doğruda ise, ve paralellikler (7) doğru ise, ise, o zaman paralellik (14)'ün de doğru olduğunu gösterin.

Bir afin düzlemde, eğer Pappus Teoreminin kesişen durumu doğru ise, o zaman Desargues Teoreminin kesişen durumu da doğrudur; ayrıca, eğer bir **0** noktasını seçersek, o zaman düzlemimiz bir vektör uzayı olur.

# 5 Çemberler

$\mathbb{R}^2$'de, resmi tanımımıza göre, **merkezi** $(a,b)$ olan, $(c,d)$ noktasından geçen **çember,**

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(c-a)^2+(d-b)^2$$

denkleminin çözüm kümesidir. Öklid'den öğrendiğimiz tanıma göre, uç noktalarının biri çemberde olan, biri merkez olan doğru parçaları eşittir. Ortak bir kavrama göre eşitlik bir denklik bağıntısıdır. O zaman $\mathbb{R}^2$'de doğru parçalarının eşitliğini

$$\begin{aligned} &AB=CD \iff \\ &(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=(c_1-d_1)^2+(c_2-d_2)^2 \qquad (16)\end{aligned}$$

denkliği ile tanımlarız. Burada, denklik (12)'deki gibi

$$AB=CD$$

eşitliğinde doğru parçası olarak $AB$ ve $CD$ farklı olabilir, ama (16)'nın sağındaki eşitlik doğru ise, o zaman $AB$ ve $CD$'nin **uzunluğu** aynıdır. Bu uzunluğu $|AB|$ ile gösterebiliriz; ayrıca

$$|AB|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$$

ile tanımlayabiliriz. Şimdi (16),

$$AB = CD \iff |AB| = |CD| \tag{17}$$

olur.

**Alıştırma 22.** Ötelemelerin, uzunlukları değiştirmediğini gösterin.

# 6 Açılar

Açıların eşitliğini de tanımlamak isteriz. Pisagor Teoreminin koşulundan

$$\begin{aligned}
&|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2 \\
&\iff {a_1}^2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\
&\iff 0 = -2a_1b_1 - 2a_2b_2 \\
&\iff 0 = a_1b_1 + a_2b_2.
\end{aligned}$$

Tanıma göre son toplam, $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$'nin **skaler çarpımıdır.** Ona **nokta çarpımı** da denir çünkü tanım olarak

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

eşitliğini yazarız.

**Teorem 13.** $\mathbb{R}^2$*'de*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \\
\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, \\
\boldsymbol{a} \cdot (t \cdot \boldsymbol{b}) &= t(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} &\geqslant 0, \\
|\boldsymbol{a}| &= \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}.
\end{aligned}$$

*Ayrıca*

$$|\boldsymbol{a}| = 0 \implies \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

**Alıştırma 23.** Teoremi kanıtlayın.

Teoremler 6, 10, 13 sayesinde $\mathbb{R}^2$ bir **iççarpım uzayıdır.**

**Teorem 14.** $\mathbb{R}^2$*'de*

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\\ |t\cdot\boldsymbol{a}| &= |t||\boldsymbol{a}|.\end{aligned}$$

*Ayrıca*

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \tag{18}$$

$$s > 0, \qquad t > 0, \tag{19}$$

$$s\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}, \qquad t\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} \tag{20}$$

*ise*

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|}. \tag{21}$$

**Alıştırma 24.** Teoremi, sadece Teorem 13'ü kullanarak kanıtlayın.

Koşullar (18) altında açı olarak $AOB$ ve $COD$ aynıdır, ve bu açı, ve (21) sayesinde, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ bölümünü belirttir. Bundan dolayı $O$'dan farklı olan herhangi $A$, $B$, $C$, ve $D$ için

$$\angle AOB = \angle COD \iff \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|}$$

denkliğini, açıların eşitliğinin tanımı olarak kabul edebiliriz. O zaman açıların dikliğini

$$AO \perp OB \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

ile tanımlayabiliriz. Ötelemelerin, açıları değiştirmediğini varsayıyoruz.

**Teorem 15** (KAK ve KKK). $\mathbb{R}^2$*'de*

$$AB = DE, \qquad BC = EF \tag{22}$$

*olduğunda*

$$\angle ABC = \angle DEF \iff AC = DF. \tag{23}$$

**Alıştırma 25.** Teoremi kanıtlayın.

**Teorem 16.** $\mathbb{R}^2$*'de* $\boldsymbol{a}$ *ve* $\boldsymbol{b}$ $\mathbf{0}$*'dan farklı olduğunda*

$$t = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$$

*olsun. O zaman*

$$\boldsymbol{a} - t \cdot \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{b}.$$

*Ayrıca*

$$|\boldsymbol{a} - t \cdot \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{b}|^2},$$

*dolayısıyla*

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

*ve*

$$-1 \leqslant \frac{t|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \leqslant 1.$$

*Ayrıca*

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \tag{24}$$

Eğer $AOB$ açısının eşitlik sınıfını $\theta$ olarak yazarsak, o zaman tanıma göre

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

Bu durumda eşitlik (24), **kosinüs teoremidir.**

**Alıştırma 26.** Aşağıdaki iki durumda $ABC$ ve $DEF$ üçgenlerinin açılarının hangi açıları birbirine eşittir?

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(6,0)$ | $(1,0)$ | $(0,6)$ | $(0,4)$ | $(3,0)$ | $(7,3)$ |
| $(0,1)$ | $(5,0)$ | $(9,7)$ | $(0,23)$ | $(17,17)$ | $(11,0)$ |

**Alıştırma 27.** Alıştırma 26 gibi kendi alıştırmalarınızı yarattın. Aşağıdaki yöntemi kullandım. Herhangi $\theta$ açısı için

$$\rho_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

olsun. O zaman $\rho_\theta$, uzunlukları değiştirmez, dolayısıyla açıları da değiştirmez. Örneğin

$$\cos\theta = \frac{3}{5}, \qquad \sin\theta = \frac{4}{5}$$

olabilir. Şimdi $\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$, paralel olmayan vektörler olduğunda, ve $s$ ve $t$, birbirinden farklı olan pozitif skalerler olduğunda,

$$\boldsymbol{c} = s \cdot \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{d} = t \cdot \boldsymbol{b}$$

olsun. O zaman

$$C' = \rho_\theta(C), \qquad D' = \rho_\theta(D)$$

olduğunda

$$\angle AOB = \angle C'OD'.$$

$AOB$ ve $C'OD'$ üçgenlerini farklı ötelemeler altında alın.