

Alıştırmalar III

G bir grup olsun. $H, K \leq G$ ise $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ olarak tanımlanır.

1. M ve N , G 'nin iki normal altgrubu ise, $M \cap N$ 'nin de G 'nin normal altgrubu olduğunu gösterin.
2. $H, K \leq G$ ise $HK \leq G$ cümlesinin yanlış olduğunu gösterin.
3. $H \leq G$ ve $K \trianglelefteq G$ ise $HK = KH$ sağlanır ve HK her zaman altgrup olur.
4. $H, K \trianglelefteq G$ ise $HK = KH$ sağlanır ve HK normal altgrup olur.
5. $H \leq G$ ise ve $[G : H] = 2$ ise $H \trianglelefteq G$ olduğunu gösterin.
6. S_3 'ün $\{e\}$, A_3 ve S_3 'ten başka normal altgrubu olmadığını gösterin.
7. $M \trianglelefteq N$ ve $N \trianglelefteq G$ ise $M \trianglelefteq G$ olmayabileceğini bir örnekle gösterin. (İpucu: En küçük örnek $G = D_4$ 'tür.)
8. $M, N \trianglelefteq G$ ve $M \cap N = 1$ ise her $m \in M$, $n \in N$ için $mn = nm$ olduğunu gösterin.
9. A ve B iki grup olsun. $M \trianglelefteq A$ ve $N \trianglelefteq B$ ise $M \times N \trianglelefteq A \times B$ olduğunu gösterin.
10. Değişmeli bir grubun her altgrubu normaldir ama her altgrubu normal olan bir grup değişmeli olmayabilir. Buna en küçük örnek Q_8 ile gösterilen kuarterniyon grubudur (quaternion group).
11. Doğru mu, yanlış mı? $H \leq G$ ve $H \cong G$ ise $H = G$.
12. Doğru mu, yanlış mı? $H \trianglelefteq G$ ve $H \cong G$ ise $G/H = 1$.
13. Doğru mu, yanlış mı? $N \trianglelefteq G$ ve G 'de birim eleman dışında sonlu basamaklı eleman yoksa, G/N grubunun bütün elemanları sonlu basamaklı olamaz.

14. G değişmeli ise, her $N \leq G$ için G/N değişmelidir.
15. G devirli ise, her $N \leq G$ için G/N devirlidir.
16. Doğru mu, yanlış mı? G değişmeli değilse, her $N \trianglelefteq G$, $N \neq G$ için G/N değişmeli değildir.
17. $g \in G$, $N \trianglelefteq G$, $g \notin N$, $g^2 \notin N$ ve $g^3 \in N$ ise gN kosetinin G/N grubundaki basamađı hesaplanabilir mi?
18. $g \in G$, $N \trianglelefteq G$ ve $g^k \in N$ ise $o(gN) \mid k$ olduğunu kanıtlayın. (Burda $o(gN)$ ile gN kosetinin G/N 'deki basamağı kastedilmektedir.)
19. Aşağıdaki gruplardan verilen elemanların o gruptaki basamağını hesaplayın. $\bar{g} \in G/N$ ile kastedilen $gN \in G/N$ 'dir.
- (a) $\overline{25} \in \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$
- (b) $\overline{200 + 300i} \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$
- (c) $\overline{28/75} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
- (d) n çiftse, $\overline{\rho_{2\pi/n}} \in D_n/\langle \rho_\pi \rangle$
- (e) $n \geq 2$ ise, $\overline{(12)} \in S_n/A_n$
- (f) $n \geq 4$ ise, $\overline{(1234)} \in S_4/H$, burda $H = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
20. Aşağıdaki izomorfizmaları kanıtlayın.
- (a) $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$.
- (b) $D_n/\langle \rho_{2\pi/n} \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.
- (c) $D_4/\{I, \rho_\pi\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$? Yoksa $D_4/\{I, \rho_\pi\} \cong \mathbb{Z}_4$?
- (d) $A_4/H \cong \mathbb{Z}_3$. H 'nin tanımı için 19f nolu soruya bakınız.
- (e) $S_4/H \cong S_3$? $S_4/H \cong \mathbb{Z}_6$?