

Alıştırmalar II

G bir grup ve $H \leq G$ olsun.

1. $[G : H] = 1$ ancak ve ancak $G = H$.
2. G sonluysa, $[G : H] = |G|$ ancak ve ancak $H = \{1\}$.
3. $[G : \{1\}]$ sonsuzdur ancak ve ancak G sonsuzdur.
4. Aşağıdaki sorularda hem verilen eşitliği kanıtlayın, hem de altgrupun verilen gruptaki tüm sol kosetlerini yazın.
 - (a) Her $n \geq 1$ için, $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$.
 - (b) $[\mathbb{Z}_{18} : \langle 3 \rangle] = 3$.
 - (c) $[\mathbb{Z}_{17} : \langle 3 \rangle] = 1$.
 - (d) $[\mathbb{Z}_8^* : \langle 3 \rangle] = 2$.
 - (e) Her $n \geq 2$ için, $[S_n : A_n] = 2$.
 - (f) Her $n \geq 3$ için, $[D_n : \langle \rho_{2\pi/n} \rangle] = 2$.
 - (g) Her $n \geq 3$ ve D_n 'deki herhangi bir y yansıması için, $[D_n : \langle y \rangle] = n$.
 - (h) Her $n \geq 1$ için, $[O_n(\mathbb{R}) : SO_n(\mathbb{R})] = 2$.
 - (i) $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.
 - (j) $[\mathbb{C} : \mathbb{Z}] = \infty$.
5. Eęer $H \leq S_n$ ve $[S_n : H] = 2$ ise, $H = A_n$ olduğunu kanıtlayınız. (Bu soruda, A_n grubunun 3'lü döngüler tarafından üretildiğini anımsayınız.)
6. Eęer $H \leq A_4$ ve $[A_4 : H] = 3$ ise, $H = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ olduğunu kanıtlayınız.
7. Yukardaki soruda, her $\sigma \in A_4$ için, $\sigma H = H\sigma$ olduğunu gösterin.
8. $[G : H] = 2$ ise, her $g \in G$ için, $gH = Hg$ olduğunu kanıtlayın.
9. K sonlu bir grup ve G herhangi bir grupsa, $[K \times G : \{e_K\} \times G] = |K|$ olur.

10. Her $A, B \leq G$ için, $[A : A \cap B] \leq [G : B]$ olduğunu gösterin. İndislerin eşit olmadığı bir örnek bulun.
11. Bu soruda $n = 2$ veya 3 olsun ve $X \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $S(X)$ ile X 'in tüm simetrisi grubunu, $S_D(X)$ ile X 'in tüm döndürme simetrisi grubunu gösterelim. $[S(X) : S_D(X)] = 1$ veya 2 olduğunu gösterin. (İpucu: 10 ve 4h numaralı soruları kullanabilirsiniz.)
12. Kitabın 11. bölümünden 1, 3, 4, 9, 10.
13. Biri döndürme olmak üzere (birim dönüşüm dahil) toplam 2013 tane simetrisi olan \mathbb{R}^2 'nin bir altkümesi var mıdır? Varsa, bulun.
14. Biri yansıma olmak üzere (birim dönüşüm dahil) toplam 2013 tane simetrisi olan \mathbb{R}^n 'in bir altkümesi var mıdır? Varsa, bulun.
15. Yukardaki iki soruda 2013 yerine 2014 yazılırsa, yanıtlar değişir mi?

Tanım. Bir G grubunun merkezi $Z(G) = \{x \in G \mid (\forall g \in G)(gx = xg)\}$ olarak tanımlanır.

1. $Z(G) \leq G$ olduğunu gösterin.
2. $Z(G) = G$ ancak ve ancak G değişmelidir.
3. Her $n \geq 3$ için, $Z(S_n) = 1$.
4. Her $n \geq 3$ için, $|Z(D_n)| \leq 2$ olduğunu gösterin.
5. Her $n \geq 1$ için, $Z(\text{GL}_n(\mathbb{R})) = \{\text{diag}(a, \dots, a) \mid a \in \mathbb{R}^*\}$.
6. Her $g \in G$ için, $gZ(G) = Z(G)g$.
7. $Z(G) = \{x \in G \mid x^G = \{x\}\}$, burda $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$ kısaltmasıdır.
8. A ve B iki grupsa, $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$ olur.
9. $G \cong H$ ise $Z(G) \cong Z(H)$ olur. (Öyleyse, $S_n \cong A_n \times \mathbb{Z}_2$ olabilir mi?)
10. İzomorfizmalar eşlenik sınıflarını korur.

Zor soru. G sonlu bir grupsa ve her $m \geq 1$ için grupta $x^m = e$ denkleminin en fazla m çözümü varsa, G 'nin devirli olduğunu gösterin.